KILKA UWAG

Z OGÓLNEJ TEORYI KRZYWYCH ALGEBRAICZNYCH.

NAPISAŁ

Józef Puzyna.

(Rzecz przedstawiona 20 Stycznia 1891 r.; referował członek Zajączkowski).

W nawiązaniu do mojej rozprawy, zamieszczonej w XIV tomie tego Pamiętnika [1]), zamierzam zająć się tu szczegółowo analitycznemi formami, które nazwałem poprzednio uogólnionemi formami interpolacyjnemi Lagrangea, a które w rzutowej teoryi krzywych algebraicznych mogą odegrać ważną rolę.

Tych form używał po raz pierwszy Paul Serret w dziele swem „*Géometrie de direction*“ i w artykułach zamieszczonych w LXXXVI i LXXXVII tomie sprawozdań *(Comptes rendus)* Akademii paryskiej, przedstawiając wszystkie iloczyny $x^\mu . y^\nu$, $\mu = 0, 1, 2, \ldots, n$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots, n$, $\mu + \nu = 0, 1, 2, \ldots, n$, jakie się w zupełnem równaniu algebraicznem:

$$G(x, y) = \sum_{\mu+\nu=0}^{n} a_{\mu\nu} . x^\mu y^\nu = 0 \qquad (C_n)$$

[1]) „O zastosowanin uogólnionych form interpolacyjnych Lagrangea“.

zawierają, w takich kształtach:

(1) $$x^{\mu} y^{\nu} = \alpha_1 x_1 y_1 + \alpha_2 x_2 y_2 + \ldots + \alpha_k x_k y_k.$$

Tutaj są

(2) $$(x_1 y_1), (x_2 y_2), \ldots, (x_k y_k)$$

spółrzędnemi $k = \frac{n}{2}(n+3)$ punktów wyznaczających jednoznacznie krzywą algebraiczną C_n, a ilości $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ są to zmienne ilości (parametry) zależne od spółrzędnych bieżącego punktu (xy) i od k punktów (2).

Związków (1) używał Serret z pożytkiem w celu wykrycia własności krzywych algebraicznych C_n pod względem ich elementów biegunowo sprzężonych lub pod względem ich ognisk. Lecz jeszcze i pod innym względem mogą być te związki — a w szczególności parametry α_s — doniosłego znaczenia i z tego powodu pożądanem zdawało mi się zająć się tem szczegółowo, udowadniając przedewszystkiem w §. 1, że parametry α_s są bezwzględnemi niezmiennikami ze względu na całkowite niejednorodne podstawienia [1]) i tworząc potem dostateczną ilość równań do obliczenia tych wielkości.

Z tych poszukiwań wynikają pewne wyrażenia, określające ogólne własności krzywej C_n, a odnoszące się do pewnych grup dowolnych jej punktów.

I tak w §. 2 mieszczą się:

a) pewne wyrażenia, które zależą od spółrzędnych $(k+1)$ punktów krzywej C_n i pozostają $= 0$, gdy z $(k+1)$ punktów $2n$ są stałe, a pozostałe punkta w ilości $\frac{n(n-1)}{2} + 1$ jakąbądź grupę na C_n tworzą;

$$2n + \frac{n(n-1)}{2} + 1 = \frac{n}{2}(n+3) + 1 = k + 1.$$

b) pewne wyrażenia, które zależą od k punktów krzywej C_n, a pozostają stałej wartości $c \gtrless o$, gdy z owych punktów $2n$ są stałe, a inne w ilości $\frac{n(n-1)}{2}$ jakbądź na C_n są rozmieszczone.

Wyrażenia (*b*) charakteryzują się inaczej tem, że zawierając spółrzędne k punktów krzywej swą wartość tylko za zmianą $2n$ obranych naprzód punktów zmieniają. Ztąd wynikają twierdzenia interpretujące

---

[1]) W przytoczonej mojej rozprawie okazałem to dla $n=2$ i $n=3$, a tylko dla $n=2$ sprowadziłem α_s do ich form najprostszych.

geometrycznie owe wyrażenia o stałych wartościach, a określające własności krzywej C_n.

W §. 3 takie wyrażenia są daleko ogólniejszej natury; po rozjęciu bowiem grupy k punktów potrzebnych do wyznaczenia krzywej C_n na dwie grupy: (a) o p punktach i (b) o r punktach, $r = 1, 2, 3, \ldots, k-1$, okazuje się, że dla krzywej C_n można utworzyć:

a) nieskończenie wiele wyrażeń zależnych od k danych punktów i jeszcze $(k+1)$-go punktu, a pozostających zerem, w jakikolwiek sposób grupę (b) jej punktów i punkt $(k+1)$-szy zmienimy na inną grupę $(r+1)$ punktów.

b) nieskończenie wiele wyrażeń zależnych od k punktów krzywej C_n, a mających stałą wartość $c \gtrless o$ w jakikolwiek sposób grupę (b) r punktów na inną zmieniamy.

Ztąd wynikają twierdzenia o r poprzecznych prostych równolegle przez r dowolnych punktów krzywej C_n poprowadzonych, a przy szczególnych założeniach wychodzą te twierdzenia na twierdzenia w §. 2 zamieszczone.

Co się tyczy samych parametrów α_s, to ich formy i geometryczne znaczenia prostsze, niżby się tego spodziewać można, wypadają [forma (A) §. 3], a każdy z nich pewną daną wartość c_s w n^2 i tylko n^2 punktach krzywej C_n przybiera.

Owe grupy po n^2 punktów wycina na C_n pęk krzywych algebraicznych n-go stopnia mających swe wspólne punkta w ilości n^2 w n punktach oznaczonych na prostej w nieskończoności.

§. 1.

Art. 1. Na płaszczyźnie dowolnego układu osi $(x o y)$ dano k punktów

$$x_1 y_1,\ x_2 y_2,\ \ldots,\ x_k y_k; \qquad k = \frac{n}{2}(n+3) \tag{1}$$

wyznaczających jednoznacznie nieprzywiedlną krzywą algebraiczną

$$G(xy) = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + \ldots + = 0 \tag{2}$$

n-go stopnia i utworzono wyznacznik

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \dots & \dots 1 \\ x & x_1 \dots & \dots x_k \\ y & y_1 \dots & \dots y_k \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y^n & y_1^n \dots & \dots y_k^n \end{vmatrix} = 0\,,$$

którego minory do pierwszej kolumny należące wprost wziąć można za spółczynniki $a_{00}, a_{10}, a_{01}, \dots, a_{0n}$.

O minorze

$$M = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_k \\ y_1 & y_2 & y_3 & \dots & y_k \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^n & y_2^n & y_3^n & \dots & y_k^n \end{vmatrix}$$

głównego elementu wyznacznika Δ dadzą się takie uwagi uczynić:

Napiszmy $G(x, y) = 0$ w postaci

$$v_m(x, y) + v_{m-1}(x, y) + \dots + v_0 = 0\,,$$

gdzie $v_s(x, y)$ są jednorodnemi funkcyjami $s$go stopnia zmiennych x, y, a $v_0 = M$, to kładąc

$$x = ra\,, \quad y = rb\,, \text{ otrzymamy}$$

(α) $$\frac{M}{v_n(a, b)} = \pm\, r_1\, r_2 \dots r_n\,.$$

$r_1, r_2, \dots, r_n$ są-to odcinki, które na prostej $bx - ay = 0$ od punktu $x = 0$, $y = 0$ do jej punktów przecięcia się z krzywą zmierzono.

Połóżmy:

(3) $$\begin{array}{l} x = p + x' \\ y = q + y' \end{array}, \text{ a więc także:}$$

$$\begin{array}{l} x_s = p + x'_s \\ y_s = q + y'_s \end{array}, \quad s = 1, 2, 3, \dots, k,$$

to otrzymamy w tym nowym układzie równanie

$$(4)\qquad v_n(x'y') + v'_{n-1}(x'\ y') + \ldots + v'_0 = 0,$$

w którem za v'_0 można położyć wprost wyznacznik

$$M' = \begin{vmatrix} x_1' & x_2' & \ldots & x_k' \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_k' \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ y_1'^n & y_2'^n & \ldots & y_k'^n \end{vmatrix},$$

a za inne spółczynniki minory, należące do pierwszej kolumny wyznacznika Δ', utworzonego z Δ przez pokreskowanie liter x, y, x_s, y_s.

Kładąc i w równaniu (4) $x' = r'a$, $y' = r'b$, otrzymamy i tu także

$$(\beta)\qquad \frac{M}{v_n(a, b)} = \pm r_1'.r_2' \ldots r_n',$$

gdzie znowu $r_1', r_2', \ldots, r_n'$ są odcinkami prostej $bx' - ay' = 0$ liczonymi od punktu $x = p$, $y = q$ do jej punktów przecięcia się z krzywą.

Z (α) i (β) otrzymujemy:

$$(5)\qquad \frac{M}{M'} = \frac{r_1\ r_2\ \ldots\ r_n}{r_1'\ r_2'\ \ldots\ r_n'} = t.$$

Lecz tak w M, jak w M' możemy za jeden z danych k punktów np. za punkt $(x_s\ y_s)$ położyć dowolny inny punkt (xy) krzywej, byleby on tylko z pozostałymi jednoznacznie wyznaczał krzywą. Przez to zastępujemy w M i M' wyrazy ich s-tych kolumn zawierające x_s, y_s wyrazami o x, y. Naznaczmy tak przekształcone wyznaczniki M, M' przez M_s, M_s' to i tu będzie niezawodnie:

$$(5')\qquad \frac{M_s}{M_s'} = \frac{r_1\ r_2\ \ldots .\ r_n}{r_1'\ r_2'\ \ldots .\ r_n'} = t,$$

a z równań (5) i (5') wyniknie:

$$\frac{M_s}{M} = \frac{M'_s}{M'};$$

to znaczy: Iloraz wyznaczników M_s, M nie zmienia swej wartości po równoległem przesunięciu układu osi.

Art. 2. W wyznaczniku M' połóżmy

$$x'_s = \mu . \xi_s + \nu . \eta_s = g_s$$
$$y'_s = \mu' \xi_s + \nu' \eta_s = h_s$$

z warunkiem

$$r = \begin{vmatrix} \mu & \nu \\ \mu' & \nu' \end{vmatrix} \gtrless 0,$$

to mamy:

$$M' = \begin{vmatrix} g_1 & g_2 & g_3 & \cdot\cdot & \cdot\cdot & g_k \\ h_1 & h_2 & h_3 & \cdot\cdot & \cdot\cdot & h_k \\ g_1^2 & g_2^2 & g_3^2 & \cdot\cdot & \cdot\cdot & g^2_k \\ g_1 h_1 & g_2 h_2 & g_3 h_3 & \cdot\cdot & \cdot\cdot & g_k h_k \\ h_1^2 & h_2^2 & h_3^2 & \cdot\cdot & \cdot\cdot & h^2_k \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ g_1^n & g_2^n & g_3^n & \cdot\cdot & \cdot\cdot & g_k^n \\ g_1^{n-1} h_1 & g_2^{n-1} h_2 & g_3^{n-1} h_3 & \cdot\cdot & \cdot\cdot & g_k^{n-1} h_k \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ h_1^n & h_2^n & h_3^n & \cdot\cdot & \cdot\cdot & h_k^n \end{vmatrix} .$$

Utwórzmy wszystkie wyznaczniki P_2 o 2^2 elementach z 2 pierwszych wierszy, podobnie wszystkie wyznaczniki P_3 o 3^2 elementach z 3 następnych wierszy ..... i wreszcie wszystkie wyznaczniki P_{n+1} o $(n+1)^2$ elementach z $(n+1)$ ostatnich wierszy, to będzie można położyć:

$$M' = \Sigma \pm P_2 . P_3 \ldots . P_{n+1} .$$

Zajmijmyż się wyznacznikami $P_{\varepsilon+1}$, $\varepsilon = 1, 2, 3, \ldots n$.

$$P_{\varepsilon+1} = \begin{vmatrix} g^\varepsilon_{\nu_1} & g^\varepsilon_{\nu_2} & \ldots & g^\varepsilon_{\nu_{\varepsilon+1}} \\ g^{\varepsilon-1}_{\nu_1} h_{\nu_1} & g^{\varepsilon-1}_{\nu_2} h_{\nu_2} & \ldots & g^{\varepsilon-1}_{\nu_{\varepsilon+1}} h_{\nu_{\varepsilon+1}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h^\varepsilon_{\nu_1} & h^\varepsilon_{\nu_2} & \ldots & h^\varepsilon_{\nu_{\varepsilon+1}} \end{vmatrix} = g^\varepsilon_{\nu_1} g^\varepsilon_{\nu_2} \cdot\cdot g^\varepsilon_{\nu_{\varepsilon+1}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \frac{h_{\nu_1}}{g_{\nu_1}} & \frac{h_{\nu_2}}{g_{\nu_2}} & \ldots & \frac{h_{\nu_{\varepsilon+1}}}{g_{\nu_{\varepsilon+1}}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{h^\varepsilon_{\nu_1}}{g^\varepsilon_{\nu_1}} & \frac{h^\varepsilon_{\nu_2}}{g^\varepsilon_{\nu_2}} & \ldots & \frac{h^\varepsilon_{\nu_{\varepsilon+1}}}{g^\varepsilon_{\nu_{\varepsilon+1}}} \end{vmatrix}$$

$$P_{\varepsilon+1} = g^{\varepsilon}_{\nu_1} g^{\varepsilon}_{\nu_2} \dots g^{\varepsilon}_{\nu_{\varepsilon+1}} \Pi_{\varepsilon+1} \left(\frac{h_{\nu_1}}{g_{\nu_1}} - \frac{h_{\nu_2}}{g_{\nu_2}} \right), \tag{6}$$

Znaczki $\nu_1, \nu_2, \dots \nu_{\varepsilon+1}$ są tu dowolnemi niepowtarzającemi się liczbami w ilości $(\varepsilon + 1)$ z szeregu liczb $1, 2, 3, \dots k$, a iloczyn $\Pi_{\varepsilon+1}$ zawiera $\frac{\varepsilon . (\varepsilon + 1)}{2}$ różnych między sobą czynników postaci $\left(\frac{h_{\nu_1}}{g_{\nu_1}} - \frac{h_{\nu_2}}{g_{\nu_2}}\right), \dots$

Gdy w formie ostatniej (6) każdy z czynników $\frac{h_{\nu_1}}{g_{\nu_1}} - \frac{h_{\nu_2}}{g_{\nu_2}}, \dots$ iloczynu $\Pi_{\varepsilon+1}$ pomnożymy odpowiednio przez $(g_{\nu_1} . g_{\nu_2}), \dots$ zawarte $g^{\varepsilon}_{\nu_1} . g^{\varepsilon}_{\nu_2} \dots g^{\varepsilon}_{\nu_{\varepsilon+1}}$, otrzymamy ostatecznie:

$$P_{\varepsilon+1} = \Pi_{\varepsilon+1} (h_{\nu_1} . g_{\nu_2} - h_{\nu_2} , g_{\nu_1})$$
$$\varepsilon = 1, 2, 3, \dots, n-1.$$

Po wstawieniu tych form za $P_2, P_3, \dots, P_{n+1}$ w M', będzie:

$$M' = \Sigma \pm \Pi (h_{\nu_1} g_{\nu_2} - h_{\nu_2} g_{\nu_1}), \tag{7}$$

gdzie każdy składnik Π tej sumy jest iloczynem

$$\sum_{\varepsilon=1}^{n} \frac{\varepsilon (\varepsilon + 1)}{2} = \frac{1}{2} (1 . 2 + 2 . 3 + 3 . 4 + \dots + n (n + 1))$$

$$= \frac{n . (n + 1) . (n + 2)}{1 . \quad 2 . \quad 3 .} = \sigma_n$$

różnych między sobą czynników $(h_{\nu_1} g_{\nu_2} - h_{\nu_2} g_{\nu_1})$.

Lecz:

$$h_{\nu_1} g_{\nu_2} - h_{\nu_2} g_{\nu_1} = \begin{vmatrix} \mu' \xi_{\nu_1} + \nu' \eta_{\nu_1}, & \mu' \xi_{\nu_2} + \nu' . \eta_{\nu_2} \\ \mu \xi_{\nu_1} + \nu \eta_{\nu_1}, & \mu \xi_{\nu_2} + \nu . \eta_{\nu_2} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \mu , & \nu \\ \mu', & \nu' \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} \eta_{\nu_1}, & \eta_{\nu_2} \\ \xi_{\nu_1}, & \xi_{\nu_2} \end{vmatrix} = r \begin{vmatrix} \eta_{\nu_1} & \eta_{\nu_2} \\ \xi_{\nu_1} & \xi_{\nu_2} \end{vmatrix},$$

a ztąd wynika, że każdy składnik Π w (7) posiada czynnik r^{σ_n} i że więc po jego wyłączeniu otrzymamy

$$M' = r^{\sigma_n} \Sigma \pm \Pi (\eta_{\nu_1} \xi_{\nu_2} - \eta_{\nu_2} \xi_{\nu_1}).$$

Ale tu suma po prawej stronie jest wyznacznikiem m, który z M' tak powstaje, że w nim za wszelkie $x_s' \, y_s'$ kładziemy ξ_s, η_s.

Skutkiem tego mamy krótko:

$$M' = r^{\sigma_n} m,$$

a że

(8) $$M = t.\, M',$$

więc będzie:

$$M = r^{\sigma_n} t.\, m$$

i analogicznie

(9) $$M_s = r^{\sigma_n} t.\, m_s,$$

jeżeli także $x' = \mu\,\xi + \nu\,\eta$, $y' = \mu'\,\xi + \nu'\,\eta$ położono i jeżeli m_s powstaje z m przez wstawienie w tym ostatnim wyznaczniku za ξ_s, η_s s-ej kolumny, zmiennych ξ, η.

Z relacyj (8), (9) wynika ostatecznie:

$$\frac{M_s}{M} = \frac{m_s}{m},$$

a to wskazuje, że:

Iloraz $M_s : M$ jest bezwzględnym niezmiennikiem ze względu na podstawienia:

$$x = p + \mu\xi + \nu\eta\,,\quad y = q + \mu'\xi + \nu'\eta\,;\quad x_s = p + \mu\xi_s + \nu\eta_s\,,$$
$$y_s = q + \mu'\xi_s + \nu'\eta_s,\quad s = 1, 2, 3, \ldots, k.$$

§. 2.

Art. 3. Wyznacznik $\Delta = 0$ (Art. 1) wskazuje, że istnieje k takich ilości α_s, dla których

$$\begin{array}{llllll}
\alpha_1 & + \alpha_2 & + \alpha_3 & + \ldots + \alpha_k & = 1 \\
\alpha_1 x_1 & + \alpha_2 x_2 & + \alpha_3 x_3 & + \ldots + \alpha_k x_k & = x \\
\alpha_1 y_1 & + \alpha_2 y_2 & + \alpha_3 y_3 & + \ldots + \alpha_k y_k & = y \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\alpha_1 y_1^n & + \alpha_2 y_2^n & + \alpha_3 y_3^n & + \ldots + \alpha_k y_k^n & = y^n.
\end{array} \tag{10}$$

Związki te są właśnie wzorami Serreta.

Z nich po opuszczeniu związku pierwszego, dostajemy

$$\alpha_s = \frac{M_s}{M},$$

gdzie M_s i M są tego samego znaczenia, co w art. poprzedzających, a ztąd wnosimy:

I. Ilości α_s są bezwzględnemi niezmiennikami, można je przeto obliczać, odnosząc x, y, x_s, y_s w nich zawarte do dowolnego układu osi.

Mając tę zasadniczą własność ilości α_s, możemy w identycznej relacyi

$$x^n = \sum_{s=1}^{k} \alpha_s x_s^n$$

zastąpić x przez wyraz $ax + by + c$, a x_s przez $ax_s + by_s + c$ i położyć

$$(ax + by + c)^n = \sum_{s=1}^{k} \alpha_s (ax_s + by_s + c)^n \tag{11}$$

określając $ax + by + c = 0$ jako dowolną prostą, którą za jednę z osi nowego układu obrano, a wyrazy ujęte w nawiasy w ostatniej relacyi jako prostopadłe (ich długości) spuszczone z punktów xy, $x_s y_s$ krzywej C_n na prostą $ax + by + c = 0$.

Ale i na odwrót: dając relacyję (11), sprawdzimy identyczność zawartych w niej ilości α_s z parametrami α_s poprzód określonemi.

I tak: w skutek dowolnych spółczynników $a, b, \dots c,$ w (11), mamy:

$$a^n (x^n - \Sigma \alpha_s x_s^n) + b^n (y^n - \Sigma \alpha_s y_s^n) + \dots + c^n (1 - \Sigma \alpha_s) \equiv 0,$$

a więc

$$x^n = \Sigma \alpha_s x_s^n, \quad y^n = \Sigma \alpha_s y_s^n, \dots, 1 = \Sigma \alpha_s,$$

zkąd prawdziwość powyższego przypuszczenia wynika.

Tak samo do krzywej $n$go stopnia C_n przy dowolnie danych n prostych linijach

$$a = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 = 0, \; b = \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 = 0, \dots, l = \alpha_n x + \beta_n y + \gamma_n = 0 \tag{12}$$

odnosić się będzie zawsze identyczna relacyja

$$abc \dots l = \sum_{s=1}^{k} \alpha_s a_s b_s c_s \dots l_s, \tag{13}$$

w których a, b, c, .., l, a_s, b_s, c_s, ..., l_s są prostopadłemi spuszczonemi z punktów (xy), $(x\, y_s)$ na proste (12). Dowód poprowadzić należy analogicznie jak dla związku (11).

Relacyja (13) będzie właśnie najstosowniejszą do wyznaczenia parametrów α_s w formach ile możności najprostszych, a cechujących ich niezmienniczy charakter. Do tego właśnie teraz przystąpimy.

Punkta $(x_1\, y_1)$, $(x_2\, y_2)$, ..., $(x_k\, y_k)$ naznaczmy w jakimbądź zresztą porządku przez

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots.,\ k,$$

punkt bieżący przez τ.

W skutek zupełnej dowolności prostych (12), możemy je tak obrać, że a, b, c, ..., l przechodzą odpowiednio przez pary punktów

$$23,\ 45,\ 67,\ \ldots,\ 2n1.$$

Wtedy jest:

$$a_2 = a_3 = b_4 = b_5 = c_6 = c_7 = \ldots = l_{2n} = l_1 = 0,$$

a relacyja (13) ma postać

$$a.\, b.\, c \ldots l = \sum_{s=2n+1}^{k} \alpha_s\, a_s\, .\, b_s\, c_s \ldots l_s \tag{13'}$$

i zawiera już tylko $k - 2n = \frac{n(n-1)}{2}$ ilości α, t. j. α_{2n+1}, α_{2n+2}, ... , α_k.

α_ε niech przedstawia którąbądź z tych ilości; $x_\varepsilon\ y_\varepsilon$ niech będą spółrzędnemi odnośnego punktu; iloczyn prostopadłych bieżącego punktu (xy) na proste a, b, c, ... , l, które teraz przez 23, 45, ... , $2n1$ naznaczać będziemy, nazwijmy krótko $(23.\ 45 \ldots 2n1)^\tau$, a iloczyn prostopadłych na te proste z punktu $(x_\varepsilon\ y_\varepsilon)$ nazwijmy $(23.\ 45 \ldots 2n1)^\varepsilon$, to przy takich oznaczeniach relacyję (13') napiszemy teraz w formie:

$$(23.\ 45 \ldots 2n1)^\tau = \Sigma\, \alpha_\varepsilon\, (23.\ 45 \ldots 2n1)^\varepsilon \tag{A}$$

$$(\varepsilon = 2n+1,\ 2n+2,\ \ldots.,\ k).$$

Uważmy to równanie za równanie linijowe jednorodne, zawierające $\frac{n(n-1)}{2} + 1$ niewiadomych

$$1,\ \alpha_{2n+1},\ \alpha_{2n+2},\ \ldots.,\ \alpha_k,$$

to potrzeba jeszcze do wyznaczenia tych niewiadomych $\frac{n(n-1)}{2}$ równań, a do nich taką drogą dojść możemy:

Punkta $1, 2, 3, \ldots, 2n$ uważajmy za wierzchołki zamkniętego wielokąta wpisanego w krzywą C_n, to jednym takim jest $2n$. kąt, którego wierzchołki właśnie w porządku

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots\ldots,\ 2n-2,\ \ 2n-1,\ \ 2n$$

po sobie następują.

Z niego do relacyi (A) użyto boków

$$23,\ 45,\ 67,\ \ldots,\ 2n1. \qquad (\alpha)$$

Pozostałe boki są

$$12,\ 34,\ 56,\ \ldots,\ 2n-1\ 2n.$$

Pomieniajmy w (α) ze sobą po porządku elementa w parach

$$(12),\ (34),\ (56),\ (78),\ \ldots,\ (2n-3\ 2n-2),\ (2n-1\ 2n), \qquad (\beta)$$

to otrzymamy z (α) n grup po n prostych, które w ten sposób naznaczymy:

$$(23,\ 45, \ldots,\ 2n1)_{12},\ (23,\ 45, \ldots,\ 2n1)_{34},\ \ldots,\ (23,\ 45, \ldots\ 2n1)_{2n-1.2n}.$$

Do nich należeć będzie n nowych równań postaci (A), a to:

$$\begin{aligned} (23.\ 45 \ldots 2n1)^{\tau}_{12} &= \Sigma\, \alpha_{\varepsilon}\, (23.\ 45 \ldots 2n1)^{\varepsilon}_{12} \\ (23.\ 45 \ldots 2n1)^{\tau}_{34} &= \Sigma\, \alpha_{\varepsilon}\, (23.\ 45 \ldots 2n1)^{\varepsilon}_{34} \\ &\vdots \\ (23.\ 45 \ldots 2n1)^{\tau}_{2n-1\ 2n} &= \Sigma\, \alpha_{\varepsilon}\, (23.\ 45 \ldots 2n1)^{\varepsilon}_{2n-1\ 2n}. \end{aligned} \qquad (B)$$

Dalej w (β) pomieniajmy równocześnie elementa w dwóch parach niesąsiadujących z sobą i tę zmianę uwzględnijmy w (α). W (α) więc

pary	(12), (56)	zastępujemy przez	(21), (65)
„	(12), (78)	„ „	(21), (87)
⋮	⋮		⋮
„	(12), (2n—3 2n—2)	„ „	(21), (2n—2 2n—3)
„	(34), (78)	„ „	(43), (87)
⋮	⋮		⋮
„	(2n—5 2n—4), (2n—1 2n)	„ „	(2n—4 2n—5),(2n 2n—1).

Przez to otrzymamy z (α) nowych $\frac{n(n-1)}{2} - n$ grup po n prostych, a te w ten sposób krótko naznaczyć możemy:

$$(23, 45, \ldots, 2n1)_{12,56},\ (23, 45, \ldots, 2n1)_{12,78},\ \ldots,\ (23, 45, \ldots, 2n1)_{12,\ 2n-3\ 2n-2}$$
$$(23, 45, \ldots, 2n1)_{34,78},\ (23, 45, \ldots, 2n1)_{34,\ 910},\ \ldots,\ (23, 45, \ldots, 2n1)_{34,\ 2n-1\ 2n}$$
$$\cdots$$
$$(23, 45, \ldots, 2n1)_{2n-5\ 2n-4,\ 2n-1\ 2n}.$$

Do tych grup znowu odnosić się będzie $\frac{n(n-1)}{2} - n$ równań analogicznych z relacyją (A):

$$\begin{aligned} (23.\ 45 \ldots 2n1)^{\tau}_{12\ 56} &= \Sigma\, \alpha_{\varepsilon}\, (23.\,45 \ldots 2n1)^{\varepsilon}_{12,56} \\ (23.\ 45 \ldots 2n1)^{\tau}_{12,\ 78} &= \Sigma\, \alpha_{\varepsilon}\, (23.\,45 \ldots 2n1)^{\varepsilon}_{12,\ 78} \\ &\vdots \end{aligned} \qquad (C)$$

$$
\begin{aligned}
\text{(C)}\quad (23.\ 45 \ldots 2n1)^{\tau}_{12,\ 2n-3\ 2n-2} &= \Sigma\, \alpha_{\varepsilon}\, (23.\ 45 \ldots 2n1)^{\varepsilon}_{12,\ 2n-3\ 2n-2} \\
(23.\ 45 \ldots 2n1)^{\tau}_{34,\ 78} &= \Sigma\, \alpha_{\varepsilon}\, (23.\ 45 \ldots 2n1)^{\varepsilon}_{34,\ 78} \\
\vdots \qquad & \qquad \vdots \\
(23.\ 45 \ldots 2n1)^{\tau}_{2n-5\ 2n-4,\ 2n-1\ 2n} &= \Sigma\, \alpha_{\varepsilon}\, (23.\ 45 \ldots 2n1)^{\varepsilon}_{2n-5\ 2n-4,\ 2n-1\ 2n}\ .
\end{aligned}
$$

Art. 4. W (A) (B) (C) mamy równań $\frac{n(n-1)}{2} + 1$ linijowych jednorodnych ze względu na tyleż niewiadomych $1,\ \alpha_{2n+1},\ \alpha_{2n+2},\ \ldots,\ \alpha_k$, a po ich eliminacyi dostaniemy relacyję:

$$
\text{(II)}\quad E_{(23,\ 45,\ \ldots\ 2n1)} = \begin{vmatrix}
(23.\ 45 \ldots 2n1)^{\tau} & \ldots & (23.\ 45 \ldots 2n1)^{\varepsilon} & \ldots \\
(23.\ 45 \ldots 2n1)^{\tau}_{12} & \ldots & (23.\ 45 \ldots 2n1)^{\varepsilon}_{12} & \ldots \\
(23.\ 45 \ldots 2n1)^{\tau}_{34} & \ldots & (23.\ 45 \ldots 2n1)^{\varepsilon}_{34} & \ldots \\
\vdots & & \vdots & \\
(23.\ 45 \ldots 2n1)^{\tau}_{2n-1\ 2n} & \ldots & (23.\ 45 \ldots 2n1)^{\varepsilon}_{2n-1.2n} & \ldots \\
(23.\ 45 \ldots 2n1)^{\tau}_{12,\ 56} & \ldots & (23.\ 45 \ldots 2n1)^{\varepsilon}_{12,\ 56} & \ldots \\
\vdots & & \vdots & \\
(23.\ 45 \ldots 2n1)^{\tau}_{12,\ 2n-3\ 2n-2} & \ldots & (23.\ 45 \ldots 2n1)^{\varepsilon}_{12,2n-3\ 2n-2} & \ldots \\
(23.\ 45 \ldots 2n1)^{\tau}_{34,\ 78} & \ldots & (23.\ 45 \ldots 2n1)^{\varepsilon}_{34,\ 78} & \ldots \\
\vdots & & \vdots & \\
(23.\ 45 \ldots 2n1)^{\tau}_{2n-5,\ 2n-4,\ 2n-1\ 2n} & \ldots & (23.\ 45 \ldots 2n1)^{\varepsilon}_{2n-5,2n-4,2n-1\ 2n} &
\end{vmatrix} = 0.
$$

Zamiast prostych $23,\ 45,\ \ldots,\ 2n1$ możemy równem prawem użyć prostych $h_1h_2,\ h_3h_4,\ \ldots,\ h_{2n-1}h_{2n}$, gdzie $h_1, h_2,\ h_3,\ \ldots,\ h_{2n}$ są punktami $1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 2n$ w dowolnym innym porządku. Wychodząc z tej grupy prostych, otrzymamy relacyję

$$E_{(h_1\ h_2,\ h_3\ h_4,\ \ldots,\ h_{2n-1}\ h_{2n})} = 0,$$

a zważając, że do niej wchodzą wszystkie boki $h_1h_2,\ h_2h_3,\ \ldots,\ h_{2n}h_1$ zamkniętego $2n$-boku $(h_1\ h_2 \ldots h_{2n}\ h_1)$ i wszystkie przekątnie $h_1h_3,\ h_2h_4,\ h_3h_5,\ \ldots\ldots$ łączące co dwa wierzchołki przegrodzone jednym tylko wierzchołkiem, powiemy:

II. Gdy w krzywą C_n wpiszemy $2n$-kąt zamknięty $(h_1h_2\ \ldots\ h_{2n}\,h_1)$ i wykreślimy w nim wszystkie przekątnie $h_1h_3,\ h_2h_4,\ \ldots$ łączące co dwa wierzchołki przegrodzone jednym tylko wierzchołkiem, to między prostopadłemi,

jakie z $\frac{n(n-1)}{2}+1$ dowolnych innych punktów krzywej C_n na boki tego $2n$-kąta i przekątnie $h_1 h_3$, $h_2 h_4$, ... spuścimy, zachodzi identyczna relacyja

$$E_{(h_1\, h_2,\, h_3\, h_4,\, \ldots)} = 0.$$

Z tych będziemy poniżej uwzględniali tylko relacyję

$$E_{(23,\, 45\, \ldots)} = 0 \quad \text{albo} \quad E_{(12,\, 34,\, \ldots)} = 0.$$

Ta druga powstaje przez eliminacyją ilości (14)

$$1,\ \alpha_{2n+1},\ \alpha_{2n+2},\ \ldots,\ \alpha_k \text{ z równania}$$

$$(12.\ 34 \ldots .\ 2n{-}1\ 2n)^{\tau} = \Sigma\, \alpha_{\varepsilon}\, (12.\ 34 \ldots .\ 2n{-}1\ 2n)^{\varepsilon} \qquad (A')$$

i z równań (B′) (C′) w ten sposób z (A′) utworzonych, jak pierwej równania (B) (C) ze związku (A) powstały. Zresztą każda z relacyj (14) przechodzi w drugą przez przesunięcie znaczków wszystkich o jedno miejsce.

W wyznaczniku $E_{(23,\, 45 \ldots)} = 0$ podzielmy wyrazy kolumny 1-ej,..., -ej, ... odpowiednio przez $(23.\ 45 \ldots 2n1)^{\tau}, \ldots, (23.\ 45 \ldots 2n1)^{\varepsilon}, \ldots$. to po skróceniach i wprowadzeniu anharmonicznych stosunków:

$$\lambda_1 = (1,2,3,2n)_{\tau},\ \lambda_2 = (3,4,5,2)_{\tau},\ \lambda_3 = (5,6,7,4)_{\tau}, \ldots, \lambda_n = (2n-1, 2n, 1, 2n-2)_{\tau}$$
$$\lambda_{1\varepsilon} = (1,2,3,2n)_{\varepsilon},\ \lambda_{2\varepsilon} = (3,4,5,2)_{\varepsilon},\ \lambda_{3\varepsilon} = (5,6,7,4)_{\varepsilon}, \ldots, \lambda_{n\varepsilon} = (2n-1, 2n, 1, 2n-2)_{\varepsilon} \quad [1]$$

otrzymamy:

$$E_{\lambda} = \begin{vmatrix} 1 & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & 1 & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \lambda_1 & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \lambda_{1\varepsilon} & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \lambda_2 & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \lambda_{2\varepsilon} & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \vdots & & & \vdots & \\ \lambda_n & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \lambda_{n\varepsilon} & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \lambda_1 \lambda_3 & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \lambda_{1\varepsilon} \lambda_{3\varepsilon} & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \lambda_1 \lambda_4 & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \lambda_{1\varepsilon} \lambda_{4\varepsilon} & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \vdots & & & \vdots & \\ \lambda_1 \lambda_{n-1} & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \lambda_{1\varepsilon} \lambda_{n-1\,\varepsilon} & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \lambda_2 \lambda_4 & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \lambda_{2\varepsilon} \lambda_{4\varepsilon} & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \lambda_2 \lambda_5 & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \lambda_{2\varepsilon} \lambda_{5\varepsilon} & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \vdots & & & \vdots & \\ \lambda_2 \lambda_n & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \lambda_{2\varepsilon} \lambda_{n\varepsilon} & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \vdots & & & \vdots & \\ \lambda_{n-2} \lambda_n & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \lambda_{n-2\,\varepsilon} \lambda_{n\varepsilon} & \cdot\ \cdot\ \cdot \end{vmatrix} = 0. \qquad (15)$$

[1]) $(1,\ 2,\ 3,\ 2n)_{\tau}, \ldots, (1,\ 2,\ 3,\ 2n)_{\varepsilon}, \ldots$ są to anharmoniczne stosunki promieni wyprowadzonych z punktów $\tau, \ldots\ \varepsilon, \ldots$ do czwórek punktów $(1,\ 2,\ 3,\ 2n), \ldots\ldots$

Tak n. p. gdy $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$ mamy:

$$\text{dla } n=2,\ E_\lambda^{(2)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ (1234)_\tau & (1234)_s \end{vmatrix} = 0;$$

dla $n = 3$, gdy punkta τ, $7, 8, 9$, naznaczymy przez $0', 1', 2', 3'$, będzie

$$E_\lambda^{(3)} = \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, & 1 \\ (1236)_{0'} & (1236)_{1'} & (1236)_{2'} & (1236)_{3'} \\ (3452)_{0'} & (3452)_{1'} & (3452)_{2'} & (3452)_{3'} \\ (5614)_{0'} & (5614)_{1'} & (5614)_{2'} & (5614)_{3'} \end{vmatrix} = 0,$$

a dla $n = 4$, gdy podobnie punkta τ, $9, 10, \ldots, 14$ naznaczymy przez $0', 1', 2', \ldots 6'$, dostaniemy:

$$E_\lambda^{(4)} = \begin{vmatrix} 1 & & 1 \\ (1238)_{0'} & \ldots\ldots & (1238)_{6'} \\ (3452)_{0'} & \ldots\ldots & (3452)_{6'} \\ (5674)_{0'} & \ldots\ldots & (5674)_{6'} \\ (7816)_{0'} & \ldots\ldots & (7816)_{6'} \\ (1238)_{0'}.(5674)_{0'} & \ldots & (1238)_{6'}.(5674)_{6'} \\ (3452)_{0'}.(7816)_{0'} & \ldots & (3452)_{6'}.(7816)_{6'} \end{vmatrix} = 0$$

i t. d.

Biorąc w wyznaczniku (15) $E_\lambda = 0$ punkta $(2n+1), (2n+2), \ldots, k$ za stałe i rozwijając ten wyznacznik podług elementów kolumny pierwszej, otrzymamy relacyję:

$$\text{(III)}\ A_0 + \sum_1^n A_s\lambda_s + \lambda_1 \sum_3^{n-1} B_s\lambda_s + \lambda_2 \sum_4^n C_s\lambda_s + \lambda_3 \sum_5^n D_s\lambda_s + \ldots + \lambda_{n-2} L_n \lambda_n = 0,$$

w której A_0, A_s, B_s, ..., L_n są liczbami stałemi.

Jestto równanie dane w spółrzędnych λ_1, λ_2, ..., λ_n krzywej algebraicznej n^{go} stopnia opisanej na $2n$-kącie $(1, 2, 3, \ldots 2n, 1)$. Lecz i odwrotnie:

III. Gdy na płaszczyźnie $2n$ stałych punktów $1,2,\ldots,2n$ punkt bieżący porusza się tak, że anharmoniczne stosunki $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ wyprowadzonych z niego promieni do $1,2,3,\ldots,2n$ spełniają relacyję (III), to punkt ten przebiega krzywą algebraiczną n^{go} stopnia, opisaną na $2n$-kącie $(1, 2, 3, \ldots, 2n, 1)$.

W szczególności mamy dla $n = 2$ z relacyi (III)

$$A_0 + A_1 \lambda_1 = 0$$

czyli

$$\lambda_1 = (1\,2\,3\,4)_\tau = \text{const.},$$

a więc zasadniczą własność rzutową krzywej drugiego stopnia.

Dla $n = 3$ relacyja (III) daje

$$A_0 + A_1\lambda_1 + A_2\lambda_2 + A_3\lambda_3 = 0,$$

czyli wyraźnie:

$$A_0 + A_1(1236)_\tau + A_2(3452)_\tau + A_3(5614)_\tau = 0,$$

a dla $n = 4$:

$$A_0 + A_1\lambda_1 + A_2\lambda_2 + A_3\lambda_3 + A_4\lambda_4 + B_1\lambda_1\lambda_3 + C_2\lambda_2\lambda_4 = 0,$$

czyli

$$A_0 + A_1(1238)_\tau + A_2(3452)_\tau + A_3(5674)_\tau + A_4(7816)_\tau + \\ + B_1(1238)_\tau(5674)_\tau + C_2(3452)_\tau(7816)_\tau \\ = 0 \quad \text{i t. d.}$$

Art. 5. Z równań (A) (B) (C) art. 3, odrzućmy związek (A) i weźmy pod uwagę jednę z ilości α_ε, to możemy ją z równań (B) (C) obliczyć, tworząc wyznacznik $H_{(\dots,\,\varepsilon-1,\,\varepsilon,\,\varepsilon+1,\dots)}$ spółczynników prawych stron tych równań, a z niego licznik $H_{(\dots\,\varepsilon-1,\,\tau,\,\varepsilon+1,\dots)}$ ilości α_ε. Otrzymamy więc:

$$\alpha_\varepsilon = \frac{H_{(\dots\,\varepsilon-1,\,\tau,\,\varepsilon+1,\,\dots)}}{H_{(\dots\,\varepsilon-1,\,\varepsilon,\,\varepsilon+1,\,\dots)}} \tag{16}$$

z tą uwagą, że tu punkta $1, 2, 3, \dots, 2n$ możemy zastąpić dowolną ich permutacyją $h_1, h_2, \dots, h_{2n}$ bez zmiany wartości parametru α_ε.

Dla $(h_1, h_2, \dots, h_{2n}) = (2, 3, \dots, 2n, 1)$ mamy

$$\alpha_\varepsilon = \frac{H'_{(\dots\,\varepsilon-1,\,\tau,\,\varepsilon+1,\,\dots)}}{H'_{(\dots\,\varepsilon-1,\,\varepsilon,\,\varepsilon+1,\,\dots)}} \tag{16'}$$

w takiej formie, jakbyśmy tę ilość właśnie z równań (B') (C') obliczali.

Przyjmijmy, że właśnie w jeden i drugi sposób obliczamy parametr $\alpha_{\frac{n(n-1)}{2}}$. Nazwijmy punkta $\tau, 2n+1, 2n+2, 2n+3, \dots, \frac{n(n-1)}{2}$ po porządku: $0', 1', 2', 3', \dots, r'$, to otrzymamy

$$\frac{H_{(1'2'\dots(r-1)'0')}}{H_{(1'2'\dots(r-1)'r')}} = \alpha_{\frac{n(n-1)}{2}} = \frac{H'_{(1'2'3'\dots(r-1)'0')}}{H'_{(1'2'3'\dots(r-1)'r')}}$$

ztąd wynika równanie:

$$\frac{H_{(1'2'3'\dots(r-1)'0')}}{H'_{(1'2'3'\dots(r-1)'0')}} = \frac{H_{(1'2'3'\dots(r-1)'r')}}{H'_{(1'2'3'\dots(r-1)'r')}},$$

które także w ten sposób napisać można:

$$\frac{H_{(0'1'2'\dots(r-1)')}}{H'_{(0'1'2'\dots(r-1)')}} = \frac{H_{(r'1'2'\dots(r-1)')}}{H'_{(r'1'2'\dots(r-1)')}}$$

albo symbolicznie:

(17) $$[0'\ 1'\ 2'\ \dots\ (r-1)'] = [r'\ 1'\ 2'\ \dots\ (r-1)']$$

Wskazuje ono, że w ilorazie $[0'\ 1'\ 2'\ \dots\ (r-1)']$ możemy punkt $0'$ zastąpić punktem innym r' leżącym na C_n, różnym od punktów $0', 1', 2', \dots (r-1)'$, a przez to iloraz ten wartości swej nie zmieni; lecz to samo stosuje się i do ilorazu $[r'\ 1'\ 2'\ 3'\ \dots\ (r-1)']$, w którym n. p. punkt $1'$ zastąpić możemy punktem $1''$ leżącym na C_n a różnym od punktów $r', 1', 2', \dots (r-1)', 0'$. Otrzymamy więc:

$$[r'\ 1'\ 2'\ \dots\ (r-1)'] = [r'\ 1''\ 2'\ 3'\ \dots\ (r-1)'],$$

a postępując tak dalej i za r' kładąc $0''$ otrzymamy ostatecznie

$$[r'\ 1'\ 2'\ 3'\ \dots\ (r-1)'] = [0''\ 1''\ 2''\ 3''\ \dots\ (r-1)''].$$

W skutek tego, uwzględniając relacyję (17), dostaniemy związek:

$$[0'\ 1'\ 2'\dots (r-1)'] = [0''\ 1''\ 2''\ \dots\ (r-1)''],\ (r-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

albo związek:

IV $$[0'\ 1'\ 2'\ \dots\ (r-1)'] = \text{const.}$$

który w ten sposób się określa:

IV. Gdy w krzywą C_n wpiszemy $2n$-kąt $(1\ 2\ 3\ \dots\ 2n1)$ a z grupy dowolnych $\frac{n(n-1)}{2}$ punktów $0', 1'\ 2', 3' \dots (\frac{n(n-1)}{2}-1)'$ spuścimy na jego boki i przekątnie 13, 24, ... prostopadłe, to możemy utworzyć wyrażenia, zawierające owe prostopadłe, a niezmieniające swych wartości ze zmianą grupy $0', 1', 2', \dots$ na inną.

Relacyje takiego samego znaczenia jak IV, możemy jeszcze inną drogą otrzymać: Oto w wyznaczniku $E_\lambda = 0$ jest stosunek dwóch wyznaczników częściowych, należących do jednego wiersza (kolumny) = stosunkowi odpowiednich częściowych wyznaczników innego wiersza (kolumny). Uwzględniając te równości, dojdziemy po przeprowadzeniu takiego rozumowania jak wyżej do związków analogicznych z IV.

Te wyrażenia o stałej wartości będą dla $n = 2$ określały znaną własność krzywej drugiego stopnia C_2, a to własność prostopadłych spuszczonych z punktu bieżącego na boki wpisanego w nią czworokąta, albo stałą wartość anharmonicznego stosunku promieni wyprowadzonych z bieżącego punktu do 4 jej punktów stałych.

W twierdzeniu IV przechodzi rzeczywiście, dla $n = 2$, $2n$-kąt na czworokąt, a grupa $\frac{n(n-1)}{2}$ punktów dowolnych redukuje się do jednego punktu bieżącego krzywej C_2.

Art. 6. Dla $n = 2$ mamy po odrzuceniu związków (A), (A′) równania:

$$\text{(B)}\ (13.\ 42)_\tau = \alpha_5\,(13.\ 42)_5\,,\quad \text{(B}'\text{)}\ (13.\ 24)_\tau = \alpha_5\,(13.\ 24)_5 \qquad \text{(B)}$$

a porównanie obliczonych z nich α_5 jest tu bez znaczenia; daje bowiem identyczność.

Dla $n = 3$ dochodzimy przeciwnie po obliczeniu parametru α_9 z trzech równań (B) i trzech równań (B′) do związku:

$$\frac{\begin{vmatrix} (13.\ 45.\ 62)_0, & (13.\ 45.\ 62)_1, & (13.\ 45.\ 62)_2, \\ (24.\ 35.\ 61)_0, & . & . \\ (23.\ 46.\ 51)_0, & . & , \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (24.\ 56.\ 13)_0, & (24.\ 56.\ 13)_1, & (24.\ 56\ 13)_2, \\ (35.\ 46.\ 12)_0, & . & . \\ (34.\ 51.\ 62)_0, & . & . \end{vmatrix}} = \text{const.}$$

a po podzieleniu i pomnożeniu licznika przez $(23.\ 45.\ 61)_0 . (23.\ 45.\ 61)_1 . (23.\ 45.\ 61)_2$, a mianownika przez $(12.\ 34.\ 56)_0 . (12.\ 34.\ 56)_1 . (12.34.56)_2$, do związku:

$$\frac{(23.45.61)_0\,(23.45.61)_1\,(23.45.61)_2}{\begin{vmatrix} (2341)_0, & (2341)_1, & (2341)_2, \\ (4563)_0, & (4563)_1, & (4563)_2, \\ (6125)_0, & (6125)_1, & (6125)_2 \end{vmatrix}} : \frac{(12.34.56)_0\,(12.34.56)_1\,(12.34.56)_2}{\begin{vmatrix} (1236)_0, & (1236)_1, & (1236)_2, \\ (3452)_0, & (3452)_1, & (3452)_2, \\ (5614)_0, & (5614)_1, & (5614)_2 \end{vmatrix}} = \text{const.} \qquad (\alpha)$$

Nazwijmy wyznaczniki zamieszczone w mianownikach krótko: Δ_{234}, Δ_{123}, to mamy ostatecznie także:

$$\frac{\Delta_{123}}{\Delta_{234}} = k . \frac{(12.\ 34.\ 56)_0\,(12.\ 34.\ 56)_1\,(12.\ 34.\ 56)_2}{(23.\ 45.\ 61)_0\,(23.\ 45.\ 61)_1\,(23.\ 45.\ 61)_2} \qquad (\beta)$$

dla każdej dowolnej grupy trzech punktów $(0', 1', 2')$; k jest tu stałą ilością.

W ten sam sposób dostaniemy analogiczne relacyje (α) (β) dla $n = 4, 5, \ldots$ i t. d.

Gdy zaś wyjdziemy z równości stosunków dwóch par odpowiednich podwyznaczników w $E_\lambda = 0$, otrzymamy:

dla $n = 2$:

$$(1234)_\tau = \text{const.}$$

a dla $n = 3$:

$$\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ (1236)_{0'} & (1236)_{1'} & (1236)_{2'} \\ (3452)_{0'} & (3452)_{1'} & (3452)_{2'} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ (1236)_{0'} & (1236)_{1'} & (1236)_{2'} \\ (5614)_{0'} & (5614)_{1'} & (5614)_{2'} \end{vmatrix}} = \text{const., albo}$$

$$\frac{\begin{vmatrix} (1236)_{1'} - (1236)_{0'}, & (1236)_{2'} - (1236)_{0'} \\ (3452)_{1'} - (3452)_{0'}, & (3452)_{2'} - (3452)_{0'} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1236)_{1'} - (1236)_{0'}, & (1236)_{2'} - (1236)_{0'} \\ (5614)_{1'} - (5614)_{0'}, & (5614)_{2'} - (5614)_{0'} \end{vmatrix}} = \text{const.}$$

i t. p.

Ostatnia relacyja, gdy punkta $0'$, $1'$ weźmiemy za punkta przecięcia się krzywej C_3 z dowolną krzywą drugiego stopnia C_2, przechodzącą przez punkta $1, 2, 3, 6$, przejdzie na:

$$\frac{\begin{vmatrix} 0 & , (1236)_{2'} - (1236)_{0'} \\ (3452)_{1'} - (3452)_{0'}, & (3452)_{2'} - (3452)_{0'} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & , (1236)_{2'} - (1236)_{0'} \\ (5614)_{1'} - (5614)_{0'}, & (5614)_{2'} - (5614)_{0'} \end{vmatrix}} = \text{const.},$$

czyli na:

$$\frac{(3452)_{0'} - (3452)_{1'}}{(5614)_{0'} - (5614)_{1'}} = \text{const.}$$

a ztąd twierdzenie: Gdy w krzywą trzeciego stopnia C_3 wpiszemy sześciokąt $(1\,2\,3\,4\,5\,6\,1)$ a przez 4 wierzchołki tego sześciokąta n. p. przez punkta $1, 2, 3, 6$ poprowadzimy dowolną krzywą drugiego stopnia C_2 przecinającą C_3 jeszcze w dwóch punktach $0'$, $1'$, i utworzymy anharmoniczne stosunki $\lambda_{20'} = (3452)_{0'}$, $\lambda_{21'} = (3452)_{1'}$, $\lambda_{30'} = (5614)_{0'}$, $\lambda_{31'} = (5614)_{1'}$, to ró-

żnice $(\lambda_{20'} - \lambda_{21'})$, $(\lambda_{30'} - \lambda_{31'})$ pozostają w stałym stosunku przy dowolnej krzywej C_2.

Punkta więc $0'$, $1'$, które, jak wiadomo, także się tem charakteryzują, że prosta $0'\,1'$ stale przez jeden punkt krzywej C_3 przechodzi, mają prócz tego jeszcze i własność określoną w ostatniem twierdzeniu.

Dla $n=4$ otrzymamy analogicznie z częściowych pierwszych wyznaczników relacyi $E\lambda = 0$ między innemi taki związek:

$$\frac{\begin{vmatrix} \lambda_{11'}-\lambda_{10'}, & \lambda_{12'}-\lambda_{10'}, & \lambda_{13'}-\lambda_{10'}, & \lambda_{14'}-\lambda_{10'}, & \lambda_{15'}-\lambda_{10'} \\ \lambda_{21'}-\lambda_{20'} & & & & \\ \lambda_{31'}-\lambda_{30'} & & & & \\ \lambda_{11'}\lambda_{31'}-\lambda_{10'}\lambda_{30'} & & & & \\ \lambda_{21'}\lambda_{41'}-\lambda_{20'}\lambda_{40'} & & & & \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_{11'}-\lambda_{10'}, & \lambda_{12'}-\lambda_{10'}, & \lambda_{13'}-\lambda_{10'}, & \lambda_{14'}-\lambda_{10'}, & \lambda_{15'}-\lambda_{10'} \\ \lambda_{31'}-\lambda_{30'} & & & & \\ \lambda_{41'}-\lambda_{40'} & & & & \\ \lambda_{11'}\lambda_{31'}-\lambda_{10'}\lambda_{30'} & & & & \\ \lambda_{21'}\lambda_{41'}-\lambda_{20'}\lambda_{40'} & & & & \end{vmatrix}} = \text{const.}$$

gdy przez punkta *1*, *2*, *3*, *8* krzywej C_4 poprowadzimy krzywą drugiego stopnia C_2, a za 4 pozostałe punkta przecięcia się jej z C_4 uznamy punkta $0'$, $1'$, $2'$, $3'$, dostaniemy:

$$\lambda_{10'} = \lambda_{11'} = \lambda_{12'} = \lambda_{13'} = c, \text{ a dalej:}$$

$$\frac{\begin{vmatrix} 0, & 0, & 0, & \lambda_{14'}-c, & \lambda_{15'}-c \\ \lambda_{21'}-\lambda_{20'}, & \lambda_{22'}-\lambda_{20'}, & \lambda_{23'}-\lambda_{20'}, & \lambda_{24'}-\lambda_{20'}, & \lambda_{25'}-\lambda_{20'} \\ \lambda_{31'}-\lambda_{30'}, & \lambda_{32'}-\lambda_{30'}, & \lambda_{33'}-\lambda_{30'}, & \lambda_{34'}-\lambda_{30'}, & \lambda_{35'}-\lambda_{30'} \\ c(\lambda_{31'}-\lambda_{30'}), & c(\lambda_{32'}-\lambda_{30'}), & c(\lambda_{33'}-\lambda_{30'}), & \lambda_{14'}\lambda_{34'}-c\lambda_{30'}, & \lambda_{15'}\lambda_{35'}-c\lambda_{30'} \\ \lambda_{21'}\lambda_{41'}-\lambda_{20'}\lambda_{40'}, & \lambda_{22'}\lambda_{42'}-\lambda_{20'}\lambda_{40'}, & \lambda_{23'}\lambda_{43'}-\lambda_{20'}\lambda_{40'}, & \lambda_{24'}\lambda_{44'}-\lambda_{20'}\lambda_{40'}, & \lambda_{25'}\lambda_{45'}-\lambda_{20'}\lambda_{40'} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0, & 0, & 0, & \lambda_{14'}-c, & \lambda_{15'}-c \\ \lambda_{31'}-\lambda_{30'}, & \lambda_{32'}-\lambda_{30'}, & \lambda_{33'}-\lambda_{30'}, & \lambda_{34'}-\lambda_{30'}, & \lambda_{35'}-\lambda_{30'} \\ \lambda_{41'}-\lambda_{40'}, & \lambda_{42'}-\lambda_{40'}, & \lambda_{43'}-\lambda_{40'}, & \lambda_{44'}-\lambda_{40'}, & \lambda_{45'}-\lambda_{40'} \\ c(\lambda_{31'}-\lambda_{30'}), & & & & \\ \lambda_{21'}\lambda_{41'}-\lambda_{20'}\lambda_{40'}, & & & & \end{vmatrix}}$$

$$= \text{const.}$$

Dwa ostatnie wiersze w wyznaczniku mianownika są takie same, jak w liczniku.

W liczniku pomnóżmy wyrazy wiersza trzeciego przez c i odejmijmy od odpowiednich wyrazów wiersza czwartego; w mianowniku pomnożone wyrazy przez c, wiersza drugiego odejmijmy od odpowiednich wyrazów wiersza czwartego. Po takiem przerobieniu będziemy mieli:

$$\frac{\begin{vmatrix} 0 & , 0 , & 0 , & \lambda_{14'} - c & , \lambda_{15'} - c \\ \lambda_{21'} - \lambda_{20'} & , \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_{31} - \lambda_{30'} & , \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & , 0 , & 0 , & \lambda_{34'}(\lambda_{14'} - c), & \lambda_{35'}(\lambda_{15'} - c) \\ \lambda_{21'}\lambda_{41'} - \lambda_{20'}\lambda_{40'} & , \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & , 0 , & 0 , & \lambda_{14'} - c & , \lambda_{15'} - c \\ \lambda_{31'} - \lambda_{30'} & , \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_{41'} - \lambda_{40'} & , \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & , 0 , & 0 , & \lambda_{34'}(\lambda_{14'} - c), & \lambda_{35'}(\lambda_{15'} - c) \\ \lambda_{21'}\lambda_{41'} - \lambda_{20'}\lambda_{40'}, & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}} = \text{const.}$$

a ztąd:

$$\frac{\begin{vmatrix} \lambda_{21'} - \lambda_{20'} & , \lambda_{22'} - \lambda_{20'} & , \lambda_{23'} - \lambda_{20'} \\ \lambda_{31'} - \lambda_{30'} & , \lambda_{32'} - \lambda_{30'} & , \lambda_{33'} - \lambda_{30'} \\ \lambda_{21'}\lambda_{41'} - \lambda_{20'}\lambda_{40'} & , \lambda_{22'}\lambda_{42'} - \lambda_{20'}\lambda_{40'} & , \lambda_{23'}\lambda_{43'} - \lambda_{20'}\lambda_{40'} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_{31'} - \lambda_{30'} & , \lambda_{32'} - \lambda_{30'} & , \lambda_{33'} - \lambda_{30'} \\ \lambda_{41'} - \lambda_{40'} & , \lambda_{42'} - \lambda_{40'} & , \lambda_{43'} - \lambda_{40'} \\ \lambda_{21'}\lambda_{41'} - \lambda_{20'}\lambda_{20'} & , \lambda_{22'}\lambda_{42'} - \lambda_{20'}\lambda_{40'} & , \lambda_{23'}\lambda_{43'} - \lambda_{20'}\lambda_{40'} \end{vmatrix}} = \text{const.}$$

albo:

$$\begin{vmatrix} 1, & 1 & , 1 & 1 \\ \lambda_{20'} & , \lambda_{21'}, & \lambda_{22'} & , \lambda_{23'} \\ \lambda_{30'} & , \lambda_{31'} & , \lambda_{32'} & , \lambda_{33'} \\ \lambda_{20'}\lambda_{40'}, & \lambda_{21'}\lambda_{41'}, & \lambda_{22'}\lambda_{42'}, & \lambda_{23'}\lambda_{43'} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1, & 1 & , 1, & 1 \\ \lambda_{30'} & , \lambda_{31'} & , \lambda_{32'} & , \lambda_{33'} \\ \lambda_{40'} & , \lambda_{41'} & , \lambda_{42'} & , \lambda_{43'} \\ \lambda_{20'}\lambda_{40'}, & \lambda_{21'}\lambda_{41'}, & \lambda_{22'}\lambda_{42'}, & \lambda_{23'}\lambda_{43'} \end{vmatrix} = \text{const.}$$

Takiemu związkowi czynią zadość anharmoniczne stosunki promieni wyprowadzonych z punktów $0', 1', 2', 3'$ do punktów $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ przy jakiejkolwiek krzywej C_2, przechodzącej przez punkta $1, 2, 3, 8$.

W formach (16) (16)' mamy wreszcie obliczony parametr α_ε. Parametr α_ε (gdzie ε jest różne od $1, 2, 3, \ldots, 2n$), jest widocznie funkcyją prostopadłych z punktu bieżącego τ i z punktów $2n+1$, $2n+2, \ldots$ $\ldots, \varepsilon, \ldots, k$ na boki $2n$-kąta $(1\,2\,3 \ldots 2n1)$ i jego przekątnie $13, 24, \ldots$ spuszczonych. (Za $2n$-kąt można jednak obrać którybądź $2n$-kąt, mający wierzchołki w $2n$ punktach, wyjętych z grupy $1, 2, 3, \ldots$ $\ldots 2n, 2n+1, \ldots, \varepsilon-1, \varepsilon+1, \ldots, k$).

Gdy ε jest jednym z punktów $1, 2, 3, \ldots, 2n$, to za wierzchołki $2n$-kąta wybieramy dowolne punkta z grupy $1, 2, \ldots \varepsilon-1, \varepsilon+1, \ldots, 2n$, $2n+1, \ldots k$, a dalej rachunek przeprowadzamy jak wyżej.

Ale nie tyle samo obliczenie wszystkich parametrów α_s, ile raczej ich różne formy są ważne dla teoryi krzywych C_n. Oto właśnie z tych różnych ich form wynikł związek IV, do którego się jeszcze relacyje II i III dołączają. Z tych pierwsza odnosi się do grupy $\frac{n(n-1)}{2} + 1$ bieżących punktów, druga do jednego punktu bieżącego krzywej algebraicznej C_n. Zauważymy wreszcie, że dla $n=3$ znajduje się równanie (III) wywiedzione zupełnie inną drogą w dziele „*Analyt. Geom. der höheren ebenen Curven*“ G. Salmona w tłum. W. Fiedlera (1873) str. 169.

§. 3.

Art. 7: Przejdźmy teraz do wyprowadzenia najogólniejszych form, w jakich parametry α_s podać można i do związków, jakie z tych obliczeń wynikają.

Gdy $\gamma(xy) = 0$ jest równaniem dowolnej krzywej n-go stopnia, a

$$(x_1 y_1),\ (x_2 y_2),\ \ldots,\ (x_k\, y_k), k = \frac{n(n+3)}{2} \tag{1}$$

punktami wyznaczającemi jak wprzódy jednoznacznie krzywą C_n o równaniu $G(xy) = 0$, (xy) punktem bieżącym tej ostatniej krzywej, to łatwo da się udowodnić podobnie jak w §. 2, art. 3, że relacyja

$$\gamma(xy) = \sum_1^k \alpha_s\, \gamma(x_s y_s) \tag{2}$$

zachodzi identycznie jeżeli w niej α_s są parametrami form uogólnionych Lagrangea.

Mając to, podzielmy punkta (1) na dwie grupy dowolne, z których pierwsza zawiera ich p

(*a*) $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_p,$

druga zawiera ich r. Jakkolwiek w tę drugą grupę wchodzi dowolnych r punktów z k punktów (1), to jednak dla uproszczenia nazywać je będziemy:

(*b*) $1, 2, 3, \ldots, r,$

a ich spółrzędne:

$$(x_1\, y_1)\ (x_2\, y_2)\ (x_3\, y_3), \ldots, (x_r\, y_r).$$

Utwórzmy $(r+1)$ krzywych algebraicznych n-go stopnia

(3) $\gamma_0(xy)=0,\ \gamma_1(xy)=0, \ldots, \gamma_t(xy)=0, \ldots, \gamma_r(xy)=0$

z warunkiem, że

1^0 z funkcyj $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_r$ najwyżej r może posiadać wspólny czynnik,

2^0 każda z tych krzywych raz tylko przez wszystkie punkta (*a*) przechodzi,

3^0 najwyżej r krzywych może prócz tego jeszcze przez niektóre punkta grupy (*b*) przechodzić, to stosując do każdej z krzywych (3) relacyję (2), znacząc przytem punkt bieżący krzywej C_n przez 0 i kładąc:

$$\gamma_t(xy)=\gamma_{t0},\ \gamma_t(x_s\, y_s)=\gamma_{ts},$$

mieć będziemy równania:

$$\begin{array}{l}
\gamma_{00}=\alpha_1\gamma_{01}+\alpha_2\gamma_{02}+\cdots+\alpha_r\gamma_{0r}\\
\gamma_{10}=\alpha_1\gamma_{11}+\alpha_2\gamma_{12}+\cdots+\alpha_r\gamma_{1r}\\
\gamma_{20}=\alpha_1\gamma_{21}+\alpha_2\gamma_{22}+\cdots+\alpha_r\gamma_{2r}\\
\vdots\\
\gamma_{r0}=\alpha_1\gamma_{r1}+\alpha_2\gamma_{r2}+\cdots+\alpha_r\gamma_{rr}
\end{array}$$

Z tych odrazu wynika związek:

$$E=\begin{vmatrix}
\gamma_{00} & \gamma_{01} & \gamma_{02} & \cdots & \gamma_{0r}\\
\gamma_{10} & \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1r}\\
\gamma_{20} & \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2r}\\
\vdots & & & & \\
\gamma_{r0} & \gamma_{r1} & \gamma_{r2} & \cdots & \gamma_{rr}
\end{vmatrix}=0, \tag{4}$$

który tak można określić:

Dla krzywej C_n można utworzyć nieskończenie wiele wyrażeń zawierających wymiernie spółrzędne $(r+1)$ ich punk-

tów, a będących zerem, jakkolwiek grupa owych $(r+1)$ punktów na krzywej C_n zmieniać się będzie.

Gdy w relacyi (4) punkta $1, 2, 3, \ldots, r$ uważać będziemy za stałe, a punkt 0 za zmienny, dostaniemy po rozwinięciu wyznacznika (4) podług elementów kolumny pierwszej, równanie:

$$A_0 \gamma_0 (xy) + A_1 \gamma_1 (xy) + \ldots + A_r \gamma_r (xy) = 0,$$

zaliczające krzywą C_n do systemu krzywych stale przez p punktów (a) przechodzących. Widocznie, gdy każda z krzywych $\gamma_0 = 0, \gamma_1 = 0, \ldots,$ $\gamma_r = 0$ kilka razy przez jeden z punktów (a) przechodzi, mamy tam punkt wielokrotny krzywej C_n, co jednak tu wykluczamy.

Obierzmy $(r + 1)$ innych krzywych algebraicznych n-go stopnia

$$\gamma'_0 (xy) = 0, \gamma'_1 (xy) = 0, \ldots, \gamma'_r (xy) = 0$$

o tej samej własności, co krzywe (3), to na ich podstawie dojdziemy analogicznie do relacyi:

$$E' = \begin{vmatrix} \gamma'_{00}, & \gamma'_{01}, & \gamma'_{02}, & \ldots, & \gamma'_{0r} \\ \gamma'_{10}, & \gamma'_{11}, & \gamma'_{12}, & \ldots, & \gamma'_{1r} \\ \gamma'_{20}, & \gamma'_{21}, & \gamma'_{22}, & \ldots, & \gamma'_{2r} \\ \vdots & & & & \\ \gamma'_{r0}, & \gamma'_{r1}, & \gamma'_{r2}, & \ldots, & \gamma'_{rr} \end{vmatrix} = 0 \qquad (5)$$

W obydwu tych wyznacznikach pozostają po porządku pierwsze częściowe wyznaczniki do któregokolwiek wiersza należące w stosunku

$$1 : \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 : \ \ldots \ : \alpha_r$$

a ztąd otrzymamy:

z $E = 0$:

$$\alpha_1 = \frac{\begin{vmatrix} \gamma_{10}, & \gamma_{12}, & \ldots, & \gamma_{1r} \\ \gamma_{20}, & \gamma_{22}, & \ldots, & \gamma_{2r} \\ \vdots & & & \\ \gamma_{r0}, & \gamma_{r2}, & \ldots, & \gamma_{rr} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \gamma_{11}, & \gamma_{12}, & \ldots, & \gamma_{1r} \\ \gamma_{21}, & \gamma_{22}, & \ldots, & \gamma_{2r} \\ \vdots & & & \\ \gamma_{r1}, & \gamma_{r2}, & \ldots, & \gamma_{rr} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} \gamma_{00}, & \gamma_{02}, & \ldots, & \gamma_{0r} \\ \gamma_{20}, & \gamma_{22}, & \ldots, & \gamma_{2r} \\ \vdots & & & \\ \gamma_{r0}, & \gamma_{r2}, & \ldots, & \gamma_{rr} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \gamma_{01}, & \gamma_{02}, & \ldots, & \gamma_{0r} \\ \gamma_{21}, & \gamma_{22}, & \ldots, & \gamma_{2r} \\ \vdots & & & \\ \gamma_{r1}, & \gamma_{r2}, & \ldots, & \gamma_{rr} \end{vmatrix}} = \ldots.. \qquad (6)$$

z $E' = 0$ zaś analogiczne wyrażenia z pokreskowanemi γ.

Z dwóch różnych form parametru α_1 zawartych w (6) wyniknie, po przeprowadzeniu analogicznych rozumowań, jak o równaniu (17)

$$[0', 1', 2', .., (r-1)'] = [r', 1', 2', ... (r-1)'],$$

art. 5go relacyja:

$$(7) \qquad \frac{\begin{vmatrix} \gamma_{01}, \gamma_{02}, & \cdots, & \gamma_{0r} \\ \gamma_{21}, \gamma_{22}, & \cdots, & \gamma_{2r} \\ \vdots & & \\ \gamma_{r1}, \gamma_{r2}, & \cdots, & \gamma_{rr} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \gamma_{11}, \gamma_{12}, & \cdots, & \gamma_{1r} \\ \gamma_{21}, \gamma_{22}, & \cdots, & \gamma_{2r} \\ \vdots & & \\ \gamma_{r1}, \gamma_{r2}, & \cdots, & \gamma_{rr} \end{vmatrix}} = \text{const.}$$

wskazująca, że:

Dla krzywej C_n można utworzyć nieskończenie wiele wyrażeń zależnych wymiernie od spółrzędnych r jej punktów, a zatrzymujących stałą wartość, jakkolwiek grupa tych punktów zmieniać się będzie.

Do takich wyrażeń należeć także będą wyrażenia

$$(8) \qquad \frac{\begin{vmatrix} \gamma_{11}, \gamma_{12}, & \cdots, & \gamma_{1r} \\ \gamma_{21}, \gamma_{22}, & \cdots, & \gamma_{2r} \\ \vdots & & \\ \gamma_{r1}, \gamma_{r2}, & \cdots, & \gamma_{rr} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \gamma'_{11}, \gamma'_{12}, & \cdots, & \gamma'_{1r} \\ \gamma'_{21}, \gamma'_{22}, & \cdots, & \gamma'_{2r} \\ \vdots & & \\ \gamma'_{r1}, \gamma'_{r2}, & \cdots, & \gamma'_{rr} \end{vmatrix}} = \text{const.}$$

wynikające z dwóch różnych form parametru α_1 obliczonego raz z równania $E = 0$, a drugi raz z równania $E' = 0$.

Dajmy ilości α_1 stałą wartość c i nazwijmy mianownik pierwszej jej formy w (6): $k =$ stała ilość (jako zależna od stale obranych punktów krzywej C_n), to mieć będziemy równanie:

$$(C'_n) \qquad \begin{vmatrix} \gamma_{10}, \gamma_{12}, & \cdots, & \gamma_{1r} \\ \gamma_{20}, \gamma_{22}, & \cdots, & \gamma_{2r} \\ \vdots & & \\ \gamma_{r0}, \gamma_{r2}, & \cdots, & \gamma_{rr} \end{vmatrix} = ck.$$

Jestto równanie krzywej algebraicznej n-go stopnia (C'_n), a że ta z krzywą C_n w n^2 punktach się przecina, więc powiemy:

Parametr α_1 (a więc i każdy parametr α_s) uogólnionych form Lagrangea przybiera n^2 razy tę samą wartość (c), gdy punkt bieżący krzywej C_n przebiega całą krzywą; a także:

Gdy w punkcie (ξ, η) krzywej C_n α_1 ma wartość c, to ten parametr nie tylko w (n^2-1) innych punktach krzywej C_n ma tą samą wartość, ale jeszcze pozostaje ten sam i poza krzywą C_n, a to we wszystkich punktach krzywej C'_n.

Grupa n^2 punktów należących do wartości innej $\alpha_1 = c'$ będą to punkta przecięcia się krzywej C_n z krzywą

$$\begin{vmatrix} \gamma_{10}, \gamma_{12}, \ldots, \gamma_{1r} \\ \gamma_{20}, \gamma_{22}, \ldots, \gamma_{2r} \\ \vdots \\ \gamma_{r0}, \gamma_{r2}, \ldots, \gamma_{rr} \end{vmatrix} = c'k. \qquad (C''_n)$$

Krzywe C'_n C''_n nie przecinają się ani w punktach krzywej C_n ani nigdzie w skończoności; inaczej bowiem parametr α_1 nie byłby jednoznaczną funkcyją miejsca (xy), jak tego jego forma wymaga. Ale krzywe C'_n C''_n przechodzą obie przez n punktów przecięcia się krzywej

$$\begin{vmatrix} \gamma_{10}, \gamma_{12}, \ldots, \gamma_{1r} \\ \gamma_{20}, \gamma_{22}, \ldots, \gamma_{2r} \\ \vdots \\ \gamma_{r0}, \gamma_{r2}, \ldots, \gamma_{rr} \end{vmatrix} = 0 \text{ z prostą } 0\, x + 0.y + k = 0$$

leżącą w nieskończoności. W tych n punktach musi się zatem mieścić n^2 punktów wspólnych tym krzywym, a ztąd twierdzenie:

Krzywe przecinające daną krzywą C_n w grupach po n^2 punktów należących do tej samej wartości parametru α_s tworzą pęk krzywych o wspólnych n^2 punktach mieszczących się w n stałych punktach na prostej w nieskończoności.

Dla $n = 2$ są to hyperbole o wspólnej parze asymptot.[1])

Art. 8. Równania

$$G(xy) = 0, \; \gamma_0(xy) = 0, \; \gamma_1(xy) = 0, \; \ldots, \; \gamma_r(xy) = 0$$

---

[1]) Por. cytowaną moją rozprawę.

niech będą dane w układzie osi, którego oś xx ma pewien żądany kierunek p. Obierzmy dwa dowolne punkta $\mu = (\xi\, \eta)$, $\nu = (\xi'\, \eta')$ na płaszczyźnie tych krzywych, to mamy

$$\frac{\gamma_0\,(\xi\,\eta)}{\gamma_0\,(\xi'\,\eta')} = \frac{(l_1\, l_2\, ..\, l_n)_\mu}{(l_1\, l_2\, ...\, l_n)_\nu}, \quad \frac{\gamma_1\,(\xi\,\eta)}{\gamma_1\,(\xi'\,\eta')} = \frac{(l_1'\, l_2'\, ...\, l_n')_\mu}{(l_1'\, l_2'\, ...\, l_n')_\nu}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

gdzie $(l_1\, l_2\, \ldots\, l_n)_\mu$, $(l'_1\, l'_2\, \ldots\, l'_n)_\mu, \ldots.$ są to iloczyny wszystkich n odcinków zawartych na prostej równoległej do p — a przechodzącej przez μ — między punktem μ a punktami przecięcia się tej prostej z krzywemi $\gamma_0\,(xy) = 0$ $\gamma_1\,(xy) = 0, \ldots.$ Analogiczne znaczenie mają symbole $(l_1\, l_2\, ..\, l_n)_\nu$, $(l_1'\, l_2'\, ..\, l_n')_\nu, \ldots.$

Zatrzymując to oznaczenie i mając relacyję (4) na oku, otrzymujemy związek

$$(9)\quad E_l = \begin{vmatrix} (l_1\; l_2 \ldots l_n)_0 & (l_1\; l_2 \ldots l_n)_1 & \ldots. & (l_1\; l_2 \ldots l_n)_r \\ (l_1'\; l_2' \ldots l_n')_0 & (l_1'\; l_2' \ldots l_n')_1 & \ldots. & (l_1'\; l_2' \ldots l_n')_r \\ \vdots & & & \\ (l_1^{(r)}\, l_2^{(r)} \ldots l_n^{(r)})_0 & (l_1^{(r)}\, l_2^{(r)} \ldots l_n^{(r)})_1 & \ldots. & (l_1^{(r)}\, l_2^{(r)} \ldots l_n^{(r)})_r \end{vmatrix} = 0$$

to znaczy:

Gdy przez $(r+1)$ dowolnych punktów $0, 1, 2, \ldots r$ krzywej C_n poprowadzimy: równoległe proste o dowolnym kierunku, a przez $(k-r)$ jej punktów $(r+1)$ krzywych algebraicznych n-go stopnia, to odcinki liczone na tych prostych od punktów $0, 1, 2, .., r$ do punktów przecięcia się tych prostych z temi $(r+1)$ krzywemi zadowalają relacyję $E_l = 0$.

Każdy z punktów $0, 1, 2, \ldots, r$ można w $E_l = 0$ zastąpić punktem innym leżącym równocześnie na odpowiedniej poprzecznej i na krzywej C_n.

Dla $n = 2$ i $r = 1$ daje relacyja $E_l = 0$ przy stałym punkcie 1 inwolucyjny podział poprzecznej przez krzywe pęku.

Podobnie przy stałych punktach $1, 2, 3, \ldots, r$ dostajemy — zaliczając krzywą $G\,(xy) = 0$ do systemu krzywych przechodzących przez $p = (k-r)$ stałych punktów $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p)$ — związek:

$$E_l = A_0\,(l_1\, l_2\, ...\, l_n)_0 + A_0'\,(l'_1\, l'_2\, ...\, l'_n)_0 + \ldots. + A^{(r)}_0\,(l^{(r)}_1\, l^{(r)}_2\, ...\, l^{(r)}_n)_0 = 0$$

wyrażający podział poprzecznej przez system krzywych stale przez p punktów przechodzących.

Trzymając się dalej oznaczeń tu wprowadzonych, napiszemy relacyję (6) (art. 7) w ten sposób:

$$\alpha_1 = \frac{\begin{vmatrix} (l'_1\ l'_2 \ldots l'_n)_0 & (l'_1\ l'_2 \ldots l'_n)_2 & \ldots & (l'_1\ l'_2 \ldots l'_n)_r \\ (l''_1\ l''_2 \ldots l''_n)_0 & (l''_1\ l''_2 \ldots l''_n)_2 & \ldots & (l''_1\ l''_2 \ldots l''_n)_r \\ \vdots & & & \\ (l^{(r)}_1\ l^{(r)}_2 \ldots l^{(r)}_n)_0 & (l^{(r)}_1\ l^{(r)}_2 \ldots l^{(r)}_n)_2 & \ldots & (l^{(r)}_1\ l^{(r)}_2 \ldots l^{(r)}_n)_r \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (l'_1\ l'_2 \ldots l'_n)_1 & (l'_1\ l'_2 \ldots l'_n)_2 & \ldots & (l'_1\ l'_2 \ldots l'_n)_r \\ (l''_1\ l''_2 \ldots l''_n)_1 & (l''_1\ l''_2 \ldots l''_n)_2 & \ldots & (l''_1\ l''_2 \ldots l''_n)_r \\ \vdots & & & \\ (l^{(r)}_1\ l^{(r)}_2 \ldots l^{(r)}_n)_1 & (l^{(r)}_1\ l^{(r)}_2 \ldots l^{(r)}_n)_2 & \ldots & (l^{(r)}_1\ l^{(r)}_2 \ldots l^{(r)}_n)_r \end{vmatrix}} = .. \qquad (10)$$

a relacyja (17) przybierze formę:

$$\frac{\begin{vmatrix} (l_1\ l_2 \ldots l_n)_1 & (l_1\ l_2 \ldots l_n)_2 & \ldots & (l_1\ l_2 \ldots l_n)_r \\ (l''_1\ l''_2 \ldots l''_n)_1 & (l''_1\ l''_2 \ldots l''_n)_2 & \ldots & (l''_1\ l''_2 \ldots l''_n)_r \\ \vdots & & & \\ (l^{(r)}_1\ l^{(r)}_2 \ldots l^{(r)}_n)_1 & (l^{(r)}_1\ l^{(r)}_2 \ldots l^{(r)}_n)_2 & \ldots & (l^{(r)}_1\ l^{(r)}_2 \ldots l^{(r)}_n)_r \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (l'_1\ l'_2 \ldots l'_n)_1 & (l'_1\ l'_2 \ldots l'_n)_2 & \ldots & (l'_1\ l'_2 \ldots l'_n)_r \\ (l''_1\ l''_2 \ldots l''_n)_1 & (l''_1\ l''_2 \ldots l''_n)_2 & \ldots & (l''_1\ l''_2 \ldots l''_n)_r \\ \vdots & & & \\ (l^{(r)}_1\ l^{(r)}_2 \ldots l^{(r)}_n)_1 & (l^{(r)}_1\ l^{(r)}_2 \ldots l^{(r)}_n)_2 & \ldots & (l^{(r)}_1\ l^{(r)}_2 \ldots l^{(r)}_n)_r \end{vmatrix}} = \text{const.} \qquad (11)$$

Poprzecznym należącym do mianownika można przy tem w relacyi (11) inny dać kierunek niż poprzecznym należącym do licznika.

Gdy $p = (k-1)$, a więc $r = 1$, to mamy z relacyi (10):

$$\alpha_1 = \frac{(l'_1\ l'_2 \ldots l'_n)_0}{(l'_1\ l'_2 \ldots l'_n)_1} = \frac{\gamma_1\,(xy)}{\gamma_1\,(x_1\,y_1)}$$

gdzie $\gamma_1\,(xy) = 0$ jest krzywą dowolną n-go stopnia przechodzącą przez $(k-1)$ punktów $(x_2 y_2)$, $(x_3 y_3)$, ..., $(x_k y_k)$ a nieprzechodzącą przez punkt $(x_1 y_1)$. Ogólnie będzie

$$\alpha_s = \frac{(l^{(s)}_1\ l^{(s)}_2 \ldots l^{(s)}_n)_0}{(l^{(s)}_1\ l^{(s)}_2 \ldots l^{(s)}_n)_s} = \frac{\gamma_s\,(xy)}{\gamma_s\,(x_s y_s)} \qquad (A)$$

$$s = 1, 2, \ldots, k$$

a $\gamma_s\,(xy) = 0$[1]) jest równaniem dowolnej krzywej n-go stopnia przechodzącej przez $(k-1)$ punktów $(x_1 y_1)$, $(x_2 y_2)$, ..., $(x_{s-1}\ y_{s-1})$, $(x_{s+1}\ y_{s+1})$, ..., $(x_k\ y_k)$, a nieprzechodzącej przez punkt $(x_s\ y_s)$.

---

[1]) Wyrażenia $(l_1^{(s)}\ l_2^{(s)} \ldots l_n^{(s)})_0$, ... i równania $\gamma_s\,(xy) = 0$ mają tu inne, zależne od znaczku s znaczenie, jak wyżej.

Według tego jest tworzenie parametrów α_s bardzo proste.

Z k punktów $(x_1 y_1)$, $(x_2 y_2)$, ..., $(x_k y_k)$ wyznaczających krzywą C_n wydzielamy punkt $(x_s y_s)$, przez pozostałe punkta w ilości $(k-1)$ prowadzimy dowolną krzywą algebraiczną n-go stopnia $\gamma_s(xy) = 0$ nieprzechodzącą przez punkt $(x_s y_s)$; przez punkt bieżący (xy) i punkt $(x_s y_s)$ prowadzimy dowolne równoległe poprzeczne i mierzymy na nich od tych punktów odcinki do przecięć się tych prostych z krzywą $\gamma_s(xy) = 0$. Stosunek iloczynów tych odcinków jest wartością parametru α_s w punkcie (xy).

Ponieważ wiemy, że parametr α_s w n^2 punktach krzywej C_n tę samą wartość przybiera, a mianownik $(l_1^{(s)} l_2^{(s)} \dots l_n^{(s)})_s$ wyrażenia (A) pozostaje stałym, możemy wnioskować:

Gdy na płaszczyźnie krzywej C_n poprowadzimy podług powyższych wskazówek krzywą $\gamma_s(xy) = 0$, to iloczyn $(l_1^{(s)} l_2^{(s)} \dots l_n^{(s)})_0$ na dowolnej poprzecznej przez punkt 0 przechodzącej powraca n^2 razy do tej samej wartości, gdy punkt 0 całą krzywą C_n przebiega, a poprzeczna kierunku nie zmienia.

Wreszcie wskutek $1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k$ mamy identycznie:

$$\frac{(l'_1 l'_2 \dots l'_n)_0}{(l'_1 l'_2 \dots l'_n)_1} + \frac{(l''_1 l''_2 \dots l''_n)_0}{(l''_1 l''_2 \dots l''_n)_2} + \dots \dots + \frac{(l_1^{(k)} l_2^{(k)} \dots l_n^{(k)})_0}{(l_1^{(k)} l_2^{(k)} \dots l_n^{(k)})_k} = 1.$$

Gdy $p \leqq n$ można krzywe $\gamma_0 = 0$, $\gamma_1 = 0, \dots, \gamma_r = 0$ zastąpić $(r+1)$ grupami po n prostych tak, że z każdej grupy p prostych przez p punktów (a) przechodzi.

Gdy $p > n$ ale $p = 2h + \varepsilon < 2n$, gdzie ε jest $= 0$, lub $= 1$, to możemy takich grup po n prostych użyć, że z każdej grupy h prostych przez coraz inne pary $2h$ punktów przechodzi. W razie $\varepsilon = 1$, $(h+1)$szą prostą przez ten pozostały punkt kładziemy. Inne proste w ilości $(n-h)$ lub $(n-h-1)$ prowadzimy dowolnie. W obydwóch tych przypadkach możemy w relacyjach (9), (10), (11) iloczyny odcinków $(l_1 \; l_2 \dots l_n)_0, \dots$ zastąpić prostopadłemi (długościami prostopadłych) z punktów $0, \dots$ na owe proste spuszczonemi.

W szczególności, wracając do oznaczeń używanych w §. 2, załóżmy, że z punktów $1, 2, 3, \dots, 2n$ tworzących teraz grupę (a) schodzą się ze sobą punkta:

$$23, \; 45, \; 67, \dots, 2n\,1.$$

wtedy mamy w krzywą C_n wpisany n- kąt zamknięty o bokach

$$12 = e_1, \; 34 = e_2, \; 56 = e_3, \dots, 2n{-}1\;2n = e_n.$$

Styczne w jego wierzchołkach $(e_1 \, e_2)$, $(e_2 \, e_3)$, ..., $(e_n \, e_1)$

$$23 = t_1,\ 45 = t_2,\ 67 = t_3,\ ...,\ 2n1 = tn$$

razem z bokami $e_1, e_2, e_3, ..., e_n$ tworzą zamknięty $2n$- kąt

$$e_1\, t_1\, e_2\, t_2\, e_3\, t_3\, \ldots .\, e_n\, t_n$$

wpisany w C_n, a gdy z grup (12), (13) utworzymy równanie (A), (B), (C) (str. 10, 11) i anharmoniczne stosunki

$$\lambda_1 = (1, 2, 3, 2n) = \frac{e_1}{t_1} : \frac{t_n}{e_1} = \frac{e_1^{\ 2}}{t_n t_1}$$

$$\lambda_2 = (3, 4, 5, 2) = \frac{e_2}{t_2} : \frac{t_1}{e_2} = \frac{e_2^{\ 2}}{t_1\, t_2}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\lambda_n = (2n-1, 2n, 1, 2n-2) = \frac{e_n}{t_n} : \frac{t_{n-1}}{e_n} = \frac{e_n^{\ 2}}{t_{n-1}\, t_n},$$

to otrzymamy relacyję III (str. 14) w formie:

$$A_0 + \sum_{s=1}^{n} A_s \frac{e_s^{\ 2}}{t_{s-1}\, t_s} + \frac{e_1^{\ 2}}{t_n\, t_1} \sum_{s=3} B_s \frac{e_s^{\ 2}}{t_{s-1}\, t_s} + \ \ldots\ + \frac{e_{n-2}^{\ \ 2}}{t_{n-3} t_{n-2}} L_n \frac{e_n^{\ 2}}{t_{n-1} t_n} = 0,$$

a więc dla $n = 2$ będzie:

$$A_0 + A_1 \frac{e_1^{\ 2}}{t_1\, t_2} = 0 \text{ czyli } \frac{e_1^{\ 2}}{t_1\, t_2} = \text{const.},$$

dla $n = 3$:

$$A_0 + A_1 \frac{e_1^{\ 2}}{t_3 t_1} + A_2 \frac{e_2^{\ 2}}{t_1\, t_2} + A_3 \frac{e_3^{\ 2}}{t_2\, t_3} = 0$$

czyli

$$A_0\, t_1\, t_2\, t_3 + A_1\, e_1^{\ 2}\, t_2 + A_2\, e_2^{\ 2}\, t_3 + A_3\, e_3^{\ 2}\, t_1 = 0$$

i t. d.

Takim relacyjom czynią zadość długości prostopadłych spuszczonych z bieżącego punktu krzywej C_n na boki wpisanego w nią n- kąta i na styczne poprowadzone w jego wierzchołkach.